L1 Mathématiques **Université de Brest**
Analyse 1

Feuille 1

Nombres réels, bornes supérieures

Questions de cours.

1. Qu'est-ce qu'une relation d'ordre (totale) $\leq$ sur un ensemble E ?
2. Donner les définitions d'un majorant et d'un minorant d'une partie A d'un ensemble totalement ordonné $(E, \leq)$.
3. Donner la définition de la borne supérieure d'une partie A d'un ensemble totalement ordonné $(E, \leq)$.

Exercice 1 (Relation d'ordre)**.**

1. Soit a un réel tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $|a| < \varepsilon$. Montrer que $a = 0$.
2. Soit a et b deux réels tels que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $b < x \Longrightarrow a < x$. Montrer que $a \leq b$.

Exercice 2. Soit $r \in \mathbb{Q}$ un nombre rationnel et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un nombre irrationnel. Montrer que $r + x$ est irrationnel et si $r \neq 0$, alors $r \cdot x$ est irrationnel.

Exercice 3. Soit $\alpha = 6 + 4\sqrt{2}$ et $\beta = 6 - 4\sqrt{2}$.

1. Montrer que les nombres $\sqrt{2}$, α et β sont irrationnels.
2. Calculer le produit $\alpha\,\beta$. Que peut-on dire du produit de deux nombres irrationnels ?
3. Calculer $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$. Que peut-on dire de la somme de deux nombres irrationnels ?

Exercice 4. Montrer que le nombre d'Euler e n'est pas rationnel.

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Indication : Supposer que $e = \dfrac{a}{b}$ pour $a, b \in \mathbb{N}^*$ et étudier le nombre

$$b!\left(\frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{b!}\right).$$

Exercice 5. Soient a et b des réels positifs ou nuls. Montrer que

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\,\sqrt{a+b}\,.$$

Exercice 6 (Inégalité triangulaire)**.** Soient a et b deux nombres réels.

1. Montrer que $|a + b| \leq |a| + |b|$. Préciser dans quel cas on a l'égalité.

2. Montrer que $||a| - |b|| \leq |a - b|$. Préciser dans quel cas on a l'égalité.

3. Montrer que si $a \leq b$ et $-a \leq b$, alors $|a| \leq b$.

Exercice 7 (Inégalités de Cauchy-Schwarz)**.**

1. Soit $a,\, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$; préciser dans quel cas on a l'égalité.

2. Soient $a_1,\, a_2, \ldots,\, a_n,\, b_1,\, b_2, \ldots,\, b_n$ des nombres réels. Montrer que
$$(a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + \ldots + a_n\, b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) \quad .$$
Préciser les cas d'égalité.

3. En déduire que $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)$; préciser le cas d'égalité.

Exercice 8. Soit x et y deux nombres réels. Montrer que
$$\max(x,\, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,\, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} \quad .$$

Exercice 9 (Caractérisation de la borne supérieure)**.** Soit A une partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A. Montrer que $M = \sup A$ si et seulement si
$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ ]M - \varepsilon\, ;\, M\,] \cap A \neq \varnothing \ .$$

Exercice 10 (Bornes supérieures et inférieures)**.** Trouver la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles suivants, dire si elles sont atteintes ou non.

1. $A = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x^2 < 3\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 < 3\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 \leq 4\}$
4. $D = \{(-1)^n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$
5. $E = \left\{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
6. $F = \left\{\frac{(-1)^n}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
7. $G = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \,:\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
8. $H = \left\{2^{(-1)^n n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$

Exercice 11. Soient A et B deux parties majorées de $\mathbb{R}$. On définit
$$A + B = \{a + b : (a,b) \in A \times B\} \quad \text{et} \quad -A = \{-a : a \in A\}\,.$$

Montrer les propositions suivantes.

1. Si $A \subseteq B$, alors $\sup A \leq \sup B$.
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A,\, \sup B)$.
3. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
4. $\inf(-A) = -\sup(A)$.
5. $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A,\, \sup B)$.
6. A-t-on l'égalité dans la proposition 5 ?