L1 Mathématiques **Université de Brest**
Analyse 1

Feuille 2
Suites numériques

Questions de cours.

1. Qu'est-ce qu'une suite bornée ?
2. Donner quelques critères de convergence pour une suite.

Exercice 1 (Étude de la monotonie)**.**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ donné. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $a_{n+1} = a_n + \alpha$ avec a_0 donné et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $b_n = n\,\alpha + (-1)^n$. Étudier en fonction de α la monotonie des suites (a_n) et (b_n).
2. Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $a_n = (n+1)(n+2)\cdots(n+n)$

Exercice 2 (Étude de la monotonie)**.** Étudier la monotonie (resp. stricte monotonie) des suites suivantes :

1. $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $\left(\dfrac{n^2}{2-3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $\left(n^{1/n}\right)_{n\geq 3}$
5. $\left(\sqrt{n+e^{-n}}\,\right)_{n\geq 0}$
6. $\left(\,n^2-2n\,\right)_{n\geq 0}$
7. $\left(\,n^n-n!\,\right)_{n\geq 1}$

Exercice 3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies ci-dessous sont bornées.

$$u_n = \frac{n+\cos(n)}{2n+3} \qquad\qquad v_n = \frac{n\cos(n)}{2n+2+\cos(n)}$$

Exercice 4. Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 5. En utilisant la définition de la limite, montrer qu'une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.

Exercice 6. Soit q un entier au moins égal à 2 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{q}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+q} = u_n$.
2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 7. Soit (a_n) et (b_n) deux suites convergentes. On note respectivement A et B les limites des suites (a_n) et (b_n). En appliquant la définition de la convergence, démontrer les propriétés suivantes :

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\, a_n = \lambda A$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = AB$.
4. Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $b_n \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$.

Exercice 8. Soit (a_n) une suite à valeurs réelles.

1. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ avec $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |\,l\,|$.
2. En déduire que si la suite $(|a_n|)$ est divergente, alors la suite (a_n) est divergente.

Exercice 9. En utilisant la définition de la limite, montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de réels et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite nulle, alors la suite $(a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 10 (Critère de convergence)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite jamais nulle, et telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $l < 1$. On veut montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
   a) Montrer qu'il esxiste $0 < r < 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall\, n \geq N$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq r$.
   b) En déduire que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq r^{n-N}|u_N|$.
   c) Conclure.
2. On suppose que $l > 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = +\infty$.
3. Si $l = 1$, montrer que la suite peut soit converger vers une limite finie, soit tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, soit ne pas avoir de limite.

Exercice 11. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par

$$a_n = \frac{n^3+1}{n^3+n^2+2} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{n+\cos(n)}{n-\sin(n)}\,.$$

1. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, trouver un entier N tel que : $\forall\, n \geq N,\ |a_n - 1| \leq \varepsilon$. Que peut-on conclure ?
2. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, trouver un entier N tel que : $\forall\, n \geq N,\ |b_n - 1| \leq \varepsilon$. Que peut-on conclure ?

Exercice 12. Étudier si les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ définies ci-dessous possèdent une limite.

$$a_n = n^{-2+(-1)^n} \qquad a_n = e^{n(-1)^n} \qquad a_n = \cos(\pi\sqrt{n})\,.$$

Exercice 13. Étudier dans chacun des cas suivants la convergence de la suite (a_n) ; en cas de convergence, calculer la limite.

1. $a_n = n^3 + \dfrac{1}{n}$
2. $a_n = n\sqrt{n} - n$
3. $a_n = \dfrac{(2n-3)(n+3)}{n^2-n-6}$
4. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
5. $a_n = \dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$
6. $a_n = \dfrac{\cos(n)}{2^n}$

7. $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$

8. $a_n = (2n)^{\frac{1}{2n}}$

9. $a_n = \dfrac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}}$

Exercice 14. Calculer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} \qquad v_n = \frac{n+e^n}{2n+e^n} \qquad w_n = \frac{\ln(n+\ln(n))}{\ln(2n+\ln(n))} \qquad x_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \ .$$

Exercice 15 (Suites et séries géométriques)**.** Soit $q \in \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_n$ une suite à valeurs réelles définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = q\,u_n$.

1. Déterminer une expression du terme général de la suite $(u_n)_n$ en fonction de q, u_0 et n.
2. Étudier la monotonie de la suite $|u_n|$.
3. Montrer que $|u_n|$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et la déterminer en fonction de $|q|$.
4. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Déterminer le terme général de la suite (S_n). Préciser dans quel cas la suite $(S_n)_n$ converge.

Exercice 16 (Suites adjacentes)**.** Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$,

$$u_{n+1} = \frac{2\,u_n\,v_n}{u_n+v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \ .$$

1. Montrer que $a < \dfrac{2ab}{a+b} < \dfrac{a+b}{2} < b$.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Calculer la limite de (u_n).

Exercice 17 (Suite de Cauchy)**.** On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy et que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 18 (Suite de Cauchy)**.**

1. Soit $0 < a < 1$ un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq a^n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle de Cauchy si elle vérifie $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n}$?

Exercice 19. Calculer $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n$ des suites (a_n).

1. $u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$
3. $u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
4. $u_n = (-1)^n \left(1 - e^{n/4}\right)$
5. $u_n = 2(-1)^n + \dfrac{n}{n+1}$
6. $u_n = (-1)^n e^{(-1)^{n+1} n}$

Exercice 20 (Théorème de Cesàro). Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. On appelle suite des moyennes de Cesàro associée à (a_n) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \quad .$$

1. **Cas d'une suite monotone.** On suppose que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de limite $l \in \mathbb{R}$.

   a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq l$ et $u_{2n} \geq \frac{1}{2}(u_n + a_{n+1})$.

   c) Montrer que la suite (u_n) converge vers l.

2. **Cas d'une suite convergente.** Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

   a) Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   b) Montrer que pour tout entier $n > n_0$, on a

   $$|u_n - l| \leq \frac{|a_1 - l| + \ldots + |a_{n_0} - l|}{n} + \frac{|a_{n_0+1} - l| + \ldots + |a_n - l|}{n} \quad .$$

   c) Montrer qu'il existe $n_1 > n_0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > n_1$,

   $$\frac{|a_1 - l| + \ldots + |a_{n_0} - l|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

   d) Conclure que la suite (u_n) converge vers l.

3. **Cas d'une suite tendant vers $-\infty$.** Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

4. **Cas d'une suite périodique.** Soit $T \in \mathbb{N}^*$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels T-périodique, c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+T} = a_n$. On introduit sa suite des moyennes de Cesàro $(u_n)_{n\geq 1}$. On note

   $$s = \frac{1}{T}(a_1 + a_2 + \ldots + a_T)$$

   et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $v_n = n\,u_n - (n+1)s$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s = \frac{1}{T}(a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+T-1})$.

   b) Montrer que la suite (v_n) est T-périodique. En déduire que la suite (v_n) est bornée.

   c) Établir que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

5. **Application.**

   a) Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs ayant pour limite $l \in [0\,;\,+\infty]$, alors la suite des moyennes géométriques $u_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ a pour limite l.

   b) En déduire que si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, alors la suite $(\sqrt[n]{y_n})$ converge vers l.