L1 Mathématiques **Université de Brest**
Analyse 1

Feuille 3
Fonctions continues

Questions de cours.

1. Donner la définition d'une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
3. Énoncer le théorème de la bijection.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x-1}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, déterminer $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\left(x \neq \frac{1}{3} \text{ et } |x| \leq \delta\right) \Longrightarrow |f(x)+3| \leq \varepsilon$. Que peut-on conclure ?

Exercice 2 (Composition de fonctions)**.** Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Montrer que si f est continue en $x_0 \in A$ et g continue en $f(x_0) \in B$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Exercice 3. Préciser dans chacun des cas suivants le domaine de définition de la fonction f et dire si elle est continue. A l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, déterminer l'image de chacune de ces fonctions.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{x-3}{x-2}$
4. $f : x \longmapsto \sqrt{4x^4+1}$
5. $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-x-6}$
6. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{2+3x}{5-2x}}$

Exercice 4. Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f tend vers l au point x si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ y \in \mathscr{D}_f,\ |y-x| \leq \delta \Longrightarrow |f(y)-l| \leq \varepsilon\ .$$

En déduire que f est continue en $x_0 \in \mathscr{D}_f$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \in [1\,;\,4] \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f. Que peut-on dire de la continuité de la fonction f ?
2. Donner l'expression de la fonction réciproque f^{-1} et étudier sa continuité.

Exercice 6. Soit $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b < c$. On suppose que $f :]a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [b\,;\,c[\longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues et que $f(b) = g(b)$. Est-ce que la fonction $h :]a\,;\,c[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a\,;\,b] \\ g(x) & \text{si } x \in [b\,;\,c[\end{cases}$$

est continue ?

Exercice 7 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que f est continue en $a \in A$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.

Exercice 8. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$f : x \longmapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad g : x \longmapsto \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) \qquad h : x \longmapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \ .$$

Exercice 9. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La fonction f est dite k-lipschitzienne si pour tout $x,\ y \in I$, $|f(x)-f(y)| \le k|x-y|$.

1. Montrer qu'une fonction k-lipschitzienne est continue.
2. Soit $f : [a\,;\,b] \longrightarrow [a\,;\,b]$ une fonction k-lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que f admet un unique point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un unique $x \in [a\,;\,b]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f,\ g$ deux fonctions continues sur I. On rappelle que pour tout $x,\ y \in \mathbb{R}$, $\max(x,\ y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min(x,\ y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que les fonctions $\min(f,\ g)$ et $\max(f,\ g)$ définies par $\min(f,\ g)(x) = \min(f(x),\ g(x))$ et $\max(f,\ g)(x) = \max(f(x),\ g(x))$ sont continues sur I.

Exercice 12. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x(\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor) \ .$$

1. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\,;\,2[$.
2. Déterminer les points de $\mathbb{R}$ où la fonction f est continue.

Exercice 13. Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n \in [0\,;\,1]$ tel que $f(\alpha_n) = f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right)$.

Indication : Introduire la fonction φ définie sur $\left[0\,;1-\frac{1}{n}\right]$ par $\varphi(x) = f(x) - f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ et calculer la somme $\varphi(0) + \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

Exercice 14. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0\,;\,1]$ telles que : $\forall\, x \in [0\,;\,1],\ f(x) < g(x)$.
Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f(x) + m < g(x)$.
Est-ce que ce résultat reste vrai si on remplace l'intervalle $[0\,;\,1]$ par l'intervalle ouvert $]0\,;\,1[$?

Exercice 15. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = 2 - \frac{5}{u_n+4}.$$

1. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_n$?
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et calculer sa limite.
3. Reprendre l'exercice avec $u_0 = 1$ et $u_0 = 0$.