L1 Mathématiques **Université de Brest**
Analyse 1

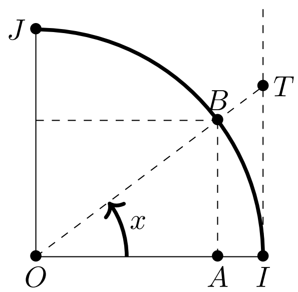
Feuille 4
Fonctions dérivables

Questions de cours.

1. Donner la définition de la dérivabilité d'une fonction f en un point.
2. Pour f une fonction bijective et dérivable, exprimer la dérivée de la fonction réciproque f^{-1} en fonction de celle de f.
3. Énoncer le théorème de Rolle.
4. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et f_n la fonction définie par $f_n(x) = x^n$. En utilisant la définition de la dérivée, montrer que f_n est dérivable sur son ensemble définition et calculer sa dérivée.

Exercice 2 (Dérivabilité de sinus et cosinus)**.** Soit $x \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$. Dans le repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$, on note B le point de coordonnées $(\cos(x),\ \sin(x))$, A le point de coordonnées $(\cos(x),\ 0)$ et T le point d'intersection de la droite (OB) et de la tangente en I au cercle unité.



1. En comparant les aires du triangle OIB, du secteur angulaire OIB et du triangle OIT, montrer que pour tout $x \in \left]0\,;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ et $\cos(x) \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq 1$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$.
3. En déduire que les fonctions $x \longmapsto \sin(x)$ et $x \longmapsto \cos(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer leur dérivée.

Exercice 3. Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective et dérivable. A partir de l'expression de la dérivée de f^{-1} en fonction de celle de f, calculer les dérivées des fonctions suivantes tout en précisant les intervalles I et J.

$$f : x \longmapsto \arccos(x) \qquad g : x \longmapsto \arcsin(x) \qquad h : x \longmapsto \arctan(x)$$

Exercice 4. Déterminer l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivée.

1. $f : x \longmapsto x\,|x|$
2. $f : x \longmapsto x\,\sin(x)\,\sqrt{x+1}$
3. $f : x \longmapsto (x^2+3x+1)e^{-x^3}$
4. $f : x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{x\,e^x}\,\right)$
5. $f : x \longmapsto \arcsin\left(1-e^{-(1+x^2)}\right)$
6. $f : x \longmapsto \arccos\left(\sin(x^2+1)\right)$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cosh(x) & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } 0 < x \le 1 \\ \dfrac{2-\ln(x)}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases} .$$

1. En quels points la fonction f est-elle continue ?
2. En quels points la fonction f est-elle dérivable ? Calculer sa dérivée en ces points.

Exercice 6. Déterminer $a,\, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si} \quad 0 < x \le 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2+bx+1 \quad \text{si} \quad x > 1$$

soit de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 7. On considère l'application $f : [-1\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[-1\,;\,1]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1\,;\,1[$ et que f' est continue sur $]-1\,;\,1[$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 9. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Montrer que pour tout $a \in I$, si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Exercice 10 (Accroissements finis)**.** Soit $a,\, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit l'application $f : [a\,;\,b] \longmapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ où $\alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq 0$. Déterminer $c \in]a\,;\,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 11 (Inégalité des accroissements finis)**.** Soient $a,\, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f,\, g : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et dérivables sur $]a\,;\,b[$ telles que pour tout $x \in]a\,;\,b[$, $|f'(x)| \le g'(x)$.

1. Montrer l'inégalité des accroissements fini $|f(b)-f(a)| \le (b-a) \sup\limits_{x \in]a\,;\,b[} |f'(x)|$.

2. Montrer que $(b-a)\inf_{t\in]a\,;\,b[}|f'(t)| \leq 2\sup_{t\in[a\,;\,b]}|f(t)|$.

3. Montrer que $|f(b)-f(a)| \leq g(b)-g(a)$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\arctan(x)$.

1. Montrer que pour tout $x,\, y\in\mathbb{R}$, $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|$; préciser les cas d'égalité.
2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $\dfrac{x}{1+x^2} \leq f(x) \leq x$.

Exercice 13. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\dfrac{x}{\cosh^2(x)} \leq \tanh(x) \leq x$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On se donne $a\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}^*$.

1. Que nous dit le théorème des accroissements finis à propos du rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
2. Montrer que si $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)=l$, alors $f'(a)=l$.
3. Montrer que si $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=l$, alors $f'(a)=l$.
4. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. On pose
$$E_a=\{g(x)\ :\ x<a\} \quad \text{et} \quad F_a=\{g(y)\ :\ y>a\}\ .$$
Montrer que E_a admet une borne supérieure notée m et que F_a admet une borne inférieure notée M. Montrer que $m \leq g(a) \leq M$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x\to a^-} g(x)=m$ et $\lim\limits_{y\to a^+} g(y)=M$.
6. Montrer que si la dérivée f' de f est croissante, alors cette dérivée est continue.

Exercice 15 (Règle de l'Hospital)**.** Soit $f,\, g\ :\ [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a\,;\,b]$ et dérivables sur $]a\,;\,b[$. On suppose que pour tout $x\in]a\,;\,b[$, $g'(x)\neq 0$.

1. Montrer que pour tout $x,\, y\in[a\,;\,b]$, si $x\neq y$, alors $g(x)\neq g(y)$.
2. Montrer que pour tout $\alpha,\,\beta\in[a\,;\,b]$ tels que $\alpha<\beta$, il existe $\gamma\in]\alpha\,;\,\beta[$ tel que
$$\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{g(\alpha)-g(\beta)}=\frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}\ .$$
Indication : Introduire la fonction $H\ :\ [a\,;\,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $H(x)=f(x)-\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{g(\alpha)-g(\beta)}g(x)$.
3. Montrer que si $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$, alors $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}=l$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 16 (Formule de Leibniz)**.** Soit f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I. Montrer que
$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\,g^{(n-k)}$$
où pour tout $k\in\{0,\ldots,n\}$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de f. Par convention, $f^{(0)}=f$.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\, e^{-1/x^2}}{x^{3n}}$$

   où P_n est un polynôme de degré $2(n-1)$.
3. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1+x)^n} .$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n)$.
4. Montrer que pour tout $x,\, y \in \mathbb{R}^+$, $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)$.

Exercice 19. On rappelle que

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} .$$

1. Montrer que la fonction $\sinh$ est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction réciproque argsh de $\sinh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que la fonction $\cosh$ n'est pas une bijection sur $\mathbb{R}$ mais que sa restriction à $[0\,;\,+\infty[$ est une bijection continue de $[0\,;\,+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer. Notons argch sa fonction réciproque.
4. Trouver l'intervalle maximal $I \subseteq J$ où argch est dérivable et calculer sa dérivée sur I.