L1 Mathématiques **Université de Brest**
Analyse 1

Feuille 5

Fonctions convexes

Questions de cours.

1. Donner la définition d'une fonction convexe.

2. Donner la définition d'une fonction concave.

Exercice 1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0\,;\,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Montrer que pour tout $x_1, \ldots, x_n \in I$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(x_i)\ .$$

Exercice 2. Soit $x,\, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x < y$.

1. Montrer que $x < \dfrac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < y$.

2. Montrer que pour tout $\lambda \in]0\,;\,1[,\ \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y) \leq \ln(\lambda x + (1-\lambda)y)$. Que peut-on conclure ?

3. Soit $p,\, q \in \mathbb{R}_+$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que pour tout $a,\, b \in \mathbb{R}_+^*,\ ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer l'inégalité arithmético-géométrique

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\ .$$

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et croissante. Démontrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 4. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a,\, b,\, c \in I$ tels que $a < b < c$.

1. Déterminer $t \in [0\,;\,1]$ tel que $b = (1-t)a + t\,c$.

2. On suppose que f est convexe. Montrer que $f(b) \leq \dfrac{c-b}{c-a} f(a) + \dfrac{b-a}{c-a} f(c)$.

3. Si f est convexe, montrer que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

4. Montrer que si l'une des inégalités de la question 3 est vérifiée, alors f est convexe.

5. Montrer que si f est convexe, alors la fonction f' est croissante.

6. Montrer que si la fonction dérivée f' est croissante, alors la fonction f est convexe.
   Indication : Pour $x,\, y \in I$ tels que $x < y$, étudier la fonction $g : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(\lambda) = \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)$.

Exercice 5. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et strictement croissante.

1. Étudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et strictement croissante telle que $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi convexe.

Exercice 6. Déterminer les intervalles où les fonctions suivantes sont convexes (resp. concaves) :

1. $f : x \longmapsto \cos(x)$
2. $f : x \longmapsto e^{2x-\cos(x)}$
3. $f : x \longmapsto e^{x^2-x}$
4. $f : x \longmapsto x\ln(x)$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$. On note $I \subseteq \mathbb{R}$ le plus grand intervalle contenant 2 sur lequel f est injective.

1. Trouver les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave.
2. Déterminer I. Calculer $f(2)$ et $(f^{-1})'(6)$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Exercice 9. Soit f une fonction convexe sur l'intervalle bornée $]a\,;\,b[$. Montrer que f est minorée.

Exercice 10. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que A est *convexe* si elle vérifie

$$\forall\,(x,\,y) \in A \times A,\ \forall\, t \in [0\,;\,1]\,,\ tx + (1-t)y \in A\ .$$

1. Montrer que le carré $[0\,;\,1] \times [0\,;\,1]$ est convexe.
2. Montrer que le disque unité $D = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ est convexe.
3. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe

$$\{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq f(x)\}$$

   est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.