L1 Mathématiques **Université de Brest**
Analyse 1

Feuille 6
Formules de Taylor et développements limités

Notation de Landau. Soit $f,\, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in I$. On suppose que g est non nulle dans un intervalle ouvert contenant a sauf éventuellement en a.

1. On dit que f est un *petit* o de g en a ce que l'on note $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Si le contexte est clair, on écrit $f(x) = o(g(x))$.
2. On dit que f est un *grand* O de g en a ce que l'on note $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$ avec $K \neq 0$. Si le contexte est clair, on écrit $f(x) = O(g(x))$.
3. On dit que f est *équivalent* à g en a ce que l'on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Si le contexte est clair, on écrit $f(x) \sim g(x)$.

Exercice 1. Comparer les fonctions f et g définies ci-dessous lorsque x tend vers 0 du point de vu des notations de Landau.

1. $f(x) = x^{7/3}$ et $g(x) = x^2$
2. $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = x$
3. $f(x) = 1 - \cos(x)$ et $g(x) = x$
4. $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$

Exercice 2. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer les affirmations suivantes.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$
2. $\forall x \geq 0\,,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$
3. $\forall\, x \in \left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right[\,,\ \tan(x) \geq x + \dfrac{x^3}{3}$
4. $\forall\, x \geq 0\,,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
5. $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \ln(1+x^2) \leq |x|$
6. $\forall\, x \in \left]-\pi\,;\, \pi\right[\,,\ \ln(1+\cos(x)) \leq \ln(2) - \dfrac{x^2}{4}$

Exercice 3. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq 1$ et $|f''(x)| \leq 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\,,\ |f'(x)| \leq 2$.

Indication : Utiliser la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+2$.

Exercice 4. Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Montrer qu'il existe $\theta \in [0\,;\,1]$ tel que $|f''(\theta)| \geq 4$.
2. Déterminer la fonction polynomiale f de degré 3 qui vérifie les conditions ci-dessus.

Exercice 5. Soit $f,\, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = e^{\sqrt{x}}$. Donner les développements limités de f et g en 1 à l'ordre 3.

Exercice 6. Trouver $a,\, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $x \longmapsto \cos(x) - \dfrac{1 + a\,x^2}{1 + b\,x^2}$ soit un $o(x^n)$ en 0 avec n maximal.

Exercice 7. Donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes.

1. $x \longmapsto \cos(x)\exp(x)$ à l'ordre 4
2. $x \longmapsto (\ln(1+x)\,)^2$ à l'ordre 4
3. $x \longmapsto \exp(\sin(x))$ à l'ordre 4
4. $x \longmapsto \sin^6(x)$ à l'ordre 9
5. $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 4
6. $x \longmapsto \sin(x)\cos(2x)$ à l'ordre 6
7. $x \longmapsto \arcsin(\,\ln(1+x^2)\,)$ à l'ordre 6
8. $x \longmapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4
9. $x \longmapsto (x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 4
10. $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 4

Exercice 8 (Extremum)**.**

1. Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\cos(x))$ présente un point critique en $x = 0$. Étudier la nature de ce point critique en calculant le développement limité de f autour de ce point.
2. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ possède un unique point critique et étudier sa nature en calculant le développement limité de f autour de ce point.

Exercice 9 (Limites)**.** A l'aide des développements limités, calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$$

Exercice 10 (Limites)**.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1 + x + \sqrt{1+x^2}}\,.$$

1. Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.
2. En déduire un développement limité de f à l'ordre 2 en $+\infty$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Calculer un développement limité de f à l'ordre 1 en $-\infty$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exercice 11 (Limites de suites)**.** Calculer les limites des suites $(u_n)_n$.

1. $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
2. $u_n = n\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$
3. $u_n = n\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$
4. $u_n = n\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$
5. $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$
6. $u_n = \arccos\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$

Exercice 12 (Formules de Taylor). Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant un point a et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$ et tout $x \in I$, on pose

$$R_p(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\, dt \, .$$

1. Formule de Taylor avec reste intégrale. Montrer que pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$ et tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_p(x) \quad . \tag{1}$$

Pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, établir une relation entre $R_p(x)$ et $R_{p-1}(x)$.

2. Formule de Taylor-Lagrange. On suppose que $x \neq a$.

a) Montrer qu'il existe ξ strictement compris entre a et x tel que $R_0(x) = (x-a)f'(\xi)$.

b) Montrer que $R_p(x) = \dfrac{(x-a)^{p+1}}{p!} \displaystyle\int_0^1 (1-u)^p\, f^{(p+1)}((1-u)a + ux)\, du$.

c) On suppose que $p \geq 1$. Soit $A \in \mathbb{R}$ tel que $R_p(x) = \dfrac{(x-a)^{p+1}\, A}{(p+1)!}$. En étudiant la fonction F définie entre a et x par

$$F(\lambda) = \int_\lambda^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t)\, dt - \frac{(x-\lambda)^p\, f^{(p)}(\lambda)}{p!} - \frac{(x-\lambda)^{p+1}\, A}{(p+1)!} \quad ,$$

montrer qu'il existe ξ strictement compris entre a et x tel que $A = f^{(p+1)}(\xi)$.

d) En déduire pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, il existe ξ strictement compris antre a et x tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad . \tag{2}$$

3. Série entière. Soit $(a_n)_n$ une suite de réels et $(S_n)_n$ la suite définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. Si la suite $(S_n)_n$ admet une limite, on pose

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad .$$

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

a) On suppose que pour tout $x \in I$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Montrer que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad .$$

b) On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sup_{x\in I} |f^{(n)}(x)| \leq M$. Montrer que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad .$$

Exercice 13 (Développement de l'exponentielle).

1. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-R\,;\,R[$,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{R^{n+1}\, e^R}{(n+1)!} \quad . \tag{3}$$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{R^{n+1}\, e^R}{(n+1)!}$. En déduire que pour tout $x \in]-R\,;\,R[$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad .$$

Conclure en donnant l'expression de e^x pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \right) \right| \leq \frac{3}{9!} \quad .$$

En déduire une valeur approchée de e à 10^{-5} près.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad .$$