L2 Mathématiques Université de Brest
Analyse dans $\mathbb{R}^n$

Feuille 2
Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$

Questions de cours.

1. Rappeler la définition d'un ouvert et d'un fermé de $\mathbb{R}^n$.
2. Qu'est-ce qu'une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$?

Exercice 1. En utilisant la définition des ouverts et des fermés de $\mathbb{R}^n$, déterminer si les parties suivantes sont ouvertes, fermées, ni l'un ni l'autre ou les deux :

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x > 0\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y \geq 0\}$
3. $B((x_0,y_0),r)$ pour $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x > 0$ et $y = 0\}$
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0$ et $y = 0\}$
6. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = y = 2z\}$
7. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x > y > z\}$
8. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x > 0$ et $y > 0\}$

Exercice 2.

1. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts.
2. Montrer que l'intervalle $]0,1[$ peut s'écrire comme une réunion dénombrable de fermés.

Exercice 3. Dans tout l'exercice on munit $\mathbb{R}^n$ de la distance euclidienne. Pour cet exercice, il est fortement recommandé de faire des figures.

1. Soit dans $\mathbb{R}^2$ un point $M = (x_0,y_0)$ et $r > 0$. Montrer que $B(M,r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que $\overline{B}(M,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Déterminer l'adhérence de $B(M,r)$.
2. Montrer que $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
3. Trouver l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble $A = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \leq 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$.
4. Trouver l'adhérence et l'intérieur des ensembles suivants dans $\mathbb{R}$:

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[\quad , \quad C = \mathbb{N}.$$

Exercice 4. Parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^n$, déterminer celles qui sont fermées et bornées (on note $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$) :

1. $A = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \forall i,\ x_i \geq 0\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \forall i,\ 1 \geq x_i \geq 0\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \exists i | x_i \geq 0\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$
5. $E = C \cap D$
6. $F = C \cup D$

7. $G = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1^2 - \sum_{i=2}^n x_i^2 = 1\}$

8. $H = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n (x_i - i)^2 \leq 1\}$

Exercice 5. L'ensemble F suivant est-il fermé ? Est-il compact ?

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2yz + xy^2z = 0 \text{ et } \cos(x)\cos(y) = 1\}.$$

Exercice 6. Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}$

$$A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

Exercice 7 (Topologie de $M_n(\mathbb{R})$)**.**

1. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $\mathscr{S}_n$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.
2. (a) Montrer que l'application determinant $M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale.
   (b) En déduire que $Gl_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que O_n est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et $A_r = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : \mathrm{rg}(M) \leq r\}$. Montrer que A_r est fermé.
5. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables (complexes) est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
6. En considérant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables (réelles) n'est pas dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Montrer qu'une réunion finie de compacts est compacte. Que peut-on dire d'une réunion infinie ? Et de l'intersection ?

Exercice 9.

1. Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction continue, l'image réciproque par f d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & \ln(x^2 + 1)\sin z - \exp(y) \end{array}$$

   et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x + y - z \end{array}$$

   sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^3$.

3. En déduire que

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ln(x^2 + 1)\sin z < \exp(y)\}, \\ U_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z > 1\} \quad \text{et} \\ U_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ln(x^2 + 1)\sin z < \exp(y) \text{ et } x + y - z > 1\} \end{aligned}$$

   sont des ouverts de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Soient f et g deux fonctions continues définies sur la boule fermée unitée $\overline{B}(0,1)$ de $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $x \in \overline{B}(0,1)$, $f(x) > g(x)$. Montrer qu'il existe $c > 0$ telle que pour tout $x \in \overline{B}(0,1), f(x) \geq g(x) + c$.

Exercice 11 (Graphe)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Montrer que si f est continue, son graphe est un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Montrer que toute suite bornée de réels admettant une unique valeur d'adhérence est convergente.
3. On suppose f bornée et de graphe fermé. Montrer que f est continue.