**L2 Mathématiques** Université de Brest
Analyse dans $\mathbb{R}^n$

# Feuille 3
# Fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$

**Exercice 1.** Étudier l'existence des limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \frac{x^2y}{x+y}$
2. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq 0}} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$
3. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$
4. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq\pm y}} \frac{x^4y}{x^2-y^2}$
5. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$

**Exercice 2.** Soit $f\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$$

et que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

**Exercice 3.** Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } xy\neq 0\\ 0 & \text{si } xy=0\end{cases}$$

Démontrer que les deux limites itérées

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

n'existent pas, et que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existe et est égale à 0.

**Exercice 4.** Déterminer les limites lorsqu'elles existent :

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}$
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$

7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{y^2}$

8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{\cos y - \cosh x}$

**Exercice 5.** Pour chacune des fonctions $f$ suivantes, étudier l'existence d'une limite en $(0,0,0)$ :

1. $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+y+z}$
2. $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$

**Exercice 6.** Étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 7.**

1. Étudier la continuité de la fonction $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(\sin x)(\sin y)}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Soit $a > 0$ fixé. Étudier la continuité de la fonction $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^a\,|y|^a}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Étudier la continuité de la fonction $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_3(x,y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{si } y > x^2 \\ 0 & \text{si } y \leq x^2. \end{cases}$$

4. On définit une fonction continue de l'ouvert $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0\}$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$f_4(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right).$$

Étudier la possibilité de prolonger $f_4$ en une fonction continue sur $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 8.** Prolonger par continuité la fonction $g : (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = xy\ln(x^2+y^2).$$

**Exercice 9.** Étudier l'existence et éventuellement la valeur de la limite en $(0,0)$ pour les fonctions définies (sur le plus grand domaine de $\mathbb{R}^2$ possible) par :

1. $f_1(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$
2. $f_2(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
3. $f_3(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$
4. $f_4(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

5. $f_5(x,y) = (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$
6. $f_6(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$
7. $f_7(x,y) = \dfrac{1+x^2+y^2}{y}\sin(y)$
8. $f_8(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
9. $f_9(x,y) = \dfrac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

**Exercice 10.** Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
2. $f_2(x,y) = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$
3. $f_3(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$
4. $f_4(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$
5. $f_5(x,y) = \dfrac{x^3}{y}$
6. $f_6(x,y) = \dfrac{x+2y}{x^2-y^2}$
7. $f_7(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$
8. $f_8(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$
9. $f_9(x,y) = \dfrac{xy}{x^4+y^4}$
10. $f_{10}(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$
11. $f_{11}(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$
12. $f_{12}(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2-y^2}}$
13. $f_{13}(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}$
14. $f_{14}(x,y) = x^y$
15. $f_{15}(x,y) = \dfrac{\sinh(x)\sinh(y)}{x+y}$