

## Feuille 4 Connexité

**Exercice 1.** Soit  $P$  un plan dans  $\mathbb{R}^3$  contenant l'origine. Montrer que le complémentaire de  $P$  dans  $\mathbb{R}^3$  admet deux composantes connexes.

**Exercice 2.** Donner des exemples de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^2$  admettant les propriétés suivantes :

1. un ensemble  $A$  connexe par arcs dont la frontière n'est pas connexe par arcs ;
2. un ensemble  $B$  connexe par arcs dont l'intérieur n'est pas connexe par arcs ;
3. un ensemble  $C$  non connexe par arcs dont l'intérieur est connexe par arcs.

**Exercice 3.** Les ensembles suivants sont ils connexes par arc ?

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}, \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 \text{ ou } x = -1\}, \\ D &= (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2, \\ E &= \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 1/x) : x > 0\}, \\ F &= (\mathbb{R} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

**Exercice 4.** Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. l'image d'une partie connexe par arcs de  $\mathbb{R}^n$  par une application continue de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  est une partie connexe par arcs de  $\mathbb{R}^p$  ;
2. l'image réciproque d'une partie connexe par arcs de  $\mathbb{R}^p$  par une application continue de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  est une partie connexe par arcs de  $\mathbb{R}^n$  .
3. l'image d'une partie connexe par arcs de  $\mathbb{R}^n$  par une application continue de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  ;
4. l'image réciproque d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  par une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  admet un nombre fini de composantes connexes.

On peut considérer notamment la fonction sinus sur  $\mathbb{R}$  et une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  comme  $f(x, y) = (x^2, y^2)$  ou encore  $g(x, y) = (|x|, |y|)$ .