L2 Mathématiques Université de Brest
Analyse dans $\mathbb{R}^n$

Feuille 5
Fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^n$

Question de cours.

1. Rappeler la définition d'une fonction différentiable en un point.
2. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en a, quelle est sa différentielle ?
3. Qu'est-ce qu'une dérivée directionnelle ?
4. Quel est le lien entre la différentiabilité et l'existence des dérivées partielles ?
5. Qu'est-ce que la jacobienne de f ?

Exercice 1. On considère les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_1(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy + x + 5y - 5 \qquad f_4(x,y) = \left(5, xy - e^{x^2y}\right)$$
$$f_2(x,y) = x^3y - xy^3$$
$$f_3(x,y) = \left(x^4 + y^4 - (x+y)^2, xy^2\right) \qquad f_5(x,y) = \left(x^2 + y^2 - 4xy - 2x, xe^y, y\right)$$

1. Calculer les dérivées partielles de ces fonctions.
2. Vérifier que ces fonctions sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer les matrices jacobiennes de ces fonctions.

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 3. Soit une application linéaire $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n\,;\,\mathbb{R}^p)$. Montrer que L est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$DL(x) = L\,,$$

c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$DL(x)(h) = L(h)\,.$$

Exercice 4. Dérivées partielles mais non différentiable (1)
On sait que si f différentiable en x_0 alors f admet des dérivées partielles en x_0. En étudiant la fonction suivante, montrer que la réciproque est fausse.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 5. Dérivées partielles mais non différentiable (2)
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f admet en $(0,0)$ des dérivées partielles.
3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 6. Dérivées directionnelles mais non différentiable

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions, mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 7. Dérivées partielles mais non continue
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet en $(0,0)$ des dérivées partielles.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
3. Vérifier que f est continue en $(0,0)$ par rapport à ses deux variables.

Exercice 8. Dérivées directionnelles mais non continue
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est discontinue en $(0,0)$.
2. Vérifier que f est continue en $(0,0)$ par rapport à ses deux variables.
3. Montrer que f admet une dérivée directionnelle selon toutes les directions en $(0,0)$.

Exercice 9. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2-y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Sans calculer de dérivées partielle montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x).$$

3. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

4. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10. Fonction différentiable non $\mathscr{C}^1$
On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $(0,0)$.

2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.

3. Montrer que les dérivées partielles de f ne sont pas continues en $(0,0)$.

Exercice 11. Dérivée et composé (1)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On définit :

$$G(x,y) = f(x^2+y,y), \quad H(x,y) = f(y,x), \quad I(x,y) = f(xy, x-y).$$

Calculer les dérivées partielles de G, H, I en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 12. Dérivée et composé (2)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On définit $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$F(\rho,\theta) = f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)).$$

Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 13. Dérivée et composé (3)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On définit $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ par

$$g(t) = f\left(e^t, \cos(t)\right) \quad \text{et} \quad h(t) = f\left(\sin(t), \frac{1}{1+t^2}\right).$$

Calculer les dérivées partielles de g et de h en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 14. Plan tangent
Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = x^2 + ay^2.$$

1. La fonction f est-elle $\mathscr{C}^1$?

2. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f en chacun de ses points.

Exercice 15. Changement de coordonnées

1. Déterminer le jacobien de l'application $(r, \theta) \longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
2. Même question avec $(r, \theta, z) \longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$.
3. Même question avec $(r, \theta, \phi) \longmapsto (r\sin(\phi)\cos(\theta), r\sin(\phi)\sin(\theta), r\cos(\phi))$.

Exercice 16. Justifier que l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable. Calculer sa différentielle en I_n puis en toute matrice M inversible.

Exercice 17. Soit E un espace vectoriel euclidien. En quels points l'application $x \longmapsto \|x\|_2$ est-elle différentiable ?

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On suppose que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+t, y+t) = f(x, y).$$

Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable homogène de degré $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Montrer que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$

Exercice 20. Soit une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, telle que $f(0) = 0$ et vérifiant

$$\forall t > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,,\ f(tx) = t^\alpha f(x)\,.$$

1. Pour quelles valeurs de α la fonction f est-elle continue en 0 ?
2. Pour quelles valeurs de α la fonction f est-elle différentiable en 0 ?