L2 Mathématiques Université de Brest
Analyse dans $\mathbb{R}^n$

Feuille 6
Accroissements finis, dérivées partielles d'ordre supérieur

Exercice 1. Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{\sin(x)}{1+y^2}\,.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne.

1. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, calculer
$$\|Df(x,y)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}\,.$$
3. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$|f(x,y)| \leq \sqrt{2}\|(x,y)\|\,.$$
Indication : on pourra démontrer et utiliser l'inégalité pour $y \in \mathbb{R}$
$$4y^2 \leq (1+y^2)^2\,.$$

Exercice 2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions f et g.

$$f(x,y) = x^2(x+y) \qquad\qquad g(x,y) = \cos(xy)$$

Exercice 3. Soit f et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathscr{C}^2$ et $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = f(x+\varphi(y)).$$

1. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^2$.
2. Vérifier l'égalité :
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Exercice 4. Soient $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $g : (r,\theta) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifier que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}.$$

Exercice 5. Écrire la formule de Taylor à l'ordre deux en $(0,0)$ de :

$$f(x,y) = e^{xy} + \ln(1+x^2+y^2) + 2x^2 + y - 1.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et diffèrent. Qu'en déduire ?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

1. f admet-elle un prolongement continu à $\mathbb{R}^2$?

2. f admet-elle un prolongement $\mathscr{C}^1$ à $\mathbb{R}^2$?

3. f admet-elle un prolongement $\mathscr{C}^2$ à $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8. Soit P un polynôme de degré $k \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}^n$. Donner la formule de Taylor en 0 à l'ordre k pour P. On pourra commencer par traiter le cas explicite du polynôme sur $\mathbb{R}^2$

$$P(x,y) = x^2 + 3xy - 2x + 4\,.$$

Exercice 9. On cherche une solution $u = u(x,y)$ de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y.$$

1. Vérifier que la fonction $v(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{6}$ est une solution particulière de (E).

2. Soit (EH) l'équation homogène associée. Montrer que les solutions de (EH) de la forme $u(x,y) = F(x)G(y)$ et ne s'annulant pas sont les solutions de l'équation :

$$\text{(ES)} \qquad \frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)}.$$

3. Expliquer pourquoi (ES) est équivalente au système d'équations :

$$\begin{cases} F''(x) = kF(x) \\ G''(y) = -kG(y) \\ k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dans toutes la suite on suppose que $k > 0$, on note alors $k = w^2$.

4. Résoudre $G''(y) = -w^2 G(y)$.

5. Résoudre $F''(x) = w^2 F(x)$.

6. Donner une solution de l'équation (E) avec conditions aux bords :

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} u(x,0) = \dfrac{x^3}{6} + e^x \\[2ex] u(0,y) = \dfrac{y^3}{6} + \cos y + \sin 2y \end{cases}$$