L2 Mathématiques Université de Brest
Analyse dans $\mathbb{R}^n$

Feuille 7
Extrema locaux, extrema liés, fonctions implicites

Exercice 1. On considère les fonctions suivante sur $\mathbb{R}^2$:

1. $f_1(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$
2. $f_2(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$
3. $f_3(x,y) = x^3y + x^3 - x^2y$
4. $f_4(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
5. $f_5(x,y) = x^2 - \cos(y)$
6. $f_6(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
7. $f_7(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

1. Vérifier que ces fonctions sont $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Rechercher les points critiques de ces fonctions. Calculer les valeurs des fonctions en ces points.
2. Calculer les Hessiennes des f_i en chacun des points critiques. Sont-elles définies positives ? Définies négatives ? Préciser le signe des valeurs propres.
3. Chercher la nature des points critiques trouvé dans la question 1. (maximum ou minimum local, point de selle).

Exercice 2. Trouver les extremums locaux et globaux sur $\mathbb{R}\times]0+\infty[$ de

$$f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2).$$

Exercice 3. Trouver les extremums locaux et globaux sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy \ , \quad f(x,y) = x^4 + y^4.$$

Exercice 4. Déterminer les extremums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + y^3$
2. $f(x,y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$
3. $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$

Exercice 5. Pour chacun des exemples suivants, démontrer que f admet un maximum sur K, et déterminer ce maximum.

1. $f(x,y) = xy(1-x-y)$ et $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ / x+y \leq 1\}$.
2. $f(x,y) = x - y + x^3 + y^3$ et $K = [0,1]^2$.

Exercice 6. Étudier les extrema de la fonction $f(x,y) = e^{axy}$ avec $a > 0$ sous la contrainte $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.

Exercice 7. Trouver le point de la courbe $y^4 = 4x$ dont la distance au point $(1,0)$ est minimale :

1. par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ;
2. en réduisant le problème à l'étude d'une fonction d'une variable.

Exercice 8. Utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour calculer le maximum et le minimum de la fonction $f\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sous les contraintes indiquées :

1. $f(x,y) = xy$ sous la contrainte $x + y - 6 = 0$;
2. $f(x,y) = 3x + y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 10$;
3. $f(x,y) = y^2 - x^2$ sous la contrainte $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 9. Soit $F(x,y) = x^2+y^2-1$. Démontrer que, pour x suffisamment proche de 0, il existe un unique $y = y(x) > 0$ tel que $f(x,y) = 0$. Vérifier, sans résolution explicite, que $y'(x) = -\dfrac{x}{y}$.

Exercice 10. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et la surface

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\; (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} + 9(z+1)^2 = 4\}\,.$$

1. A l'aide du théorème des fonctions implicites, construire un paramétrage de S au voisinage de son "pôle Nord", puis donner la différentielle de ce paramétrage sur son domaine de définition.
2. Paramétrer S sans utiliser le théorème des fonctions implicites.
3. Quelle est l'équation du plan tangent à S en son pôle Nord ?

Exercice 11. On considère l'équation

$$xe^y + ye^x = 0\,.$$

1. Vérifier qu'elle définit une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
2. Calculer le développement de Taylor de φ à l'ordre 2 au voisinage de $x = 0$.