**L2 Mathématiques** Université de Brest

Suites et Séries

# Feuille 1
# Suites numériques

### Questions de cours

1. Quand dit-on que deux suites sont équivalentes.
2. Qu'est-ce qu'une suite convergente ? Une suite de Cauchy ?
3. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
4. Donner quelques critères de convergence pour une suite.

### Exercice 1. Suite monotone

On considère la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

### Exercice 2. Théorème des gendarmes

On considère la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge.

### Exercice 3. Suites équivalentes

On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{\sin(\frac{1}{n})(e^{\frac{1}{n}}-1)}{\ln(1+\frac{1}{n^2})}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge.

### Exercice 4. Suites adjacentes

Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $0 < a < b$.

1. Montrer que $a < \dfrac{2ab}{a+b} < \dfrac{a+b}{2} < b$.
2. En déduire que les suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$ sont adjacentes.
3. Calculer la limite de $(u_n)$ et $(v_n)$.

**Exercice 5.** Étudier les suites :

$$\left(\frac{1}{2}\arctan(n)\right)^n\ ;\ \sqrt[n]{n^\alpha}(\alpha\in\mathbb{R})\ ;\ \left(\frac{\pi}{4}+\frac{10^{10}}{n}\right)^n\ ;\ \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n(a\in\mathbb{R})\ ;\ \frac{n!}{n^n}.$$

**Exercice 6. Équivalents**

Déterminer un équivalent le plus simple possible de chacune des suites suivantes quand $n$ tend vers $+\infty$ :

$$\arccos(\frac{n-1}{n}),\quad \arccos\frac{1}{n},\quad ch(\sqrt{n}),\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$(1+\sqrt{n})^{-\sqrt{n}},\quad \left(\ln(\cos\frac{1}{n})\right)\left(\ln(\sin\frac{1}{n})\right),\quad \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1.$$

**Exercice 7. Critère de convergence**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite jamais nulle, et telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l\in\mathbb{R}$.

1. On suppose que $l<1$. On veut montrer que $\lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n=0$.
   (a) Montrer qu'il existe $0<r<1$ et $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\leq r$.
   (b) En déduire que $|u_n|\leq r^{n-N}|u_N|$ pour tout $n\geq N$.
   (c) Conclure.
2. On suppose que $l>1$. Montrer que $\lim_{n\longrightarrow+\infty}|u_n|=+\infty$.
3. Si $l=1$ montrer que la suite peut soit converger vers une limite finie, soit tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, soit ne pas avoir de limite.

**Exercice 8.** Utiliser l'exercice précédent pour étudier la convergence des suites :

1. $\left(\frac{a^n}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ avec $a\in\mathbb{R}^+$ et $p\in\mathbb{N}$.
2. $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a\in\mathbb{R}^+$.
3. $\binom{2n}{n}_{n\in\mathbb{N}}=\frac{2n!}{(n!)^2}$.

**Exercice 9.** Démontrer les propriétés suivantes :

1. Toute suite de Cauchy est bornée.
2. Si la suite $(x_n)$ tend vers zéro et si la suite $(y_n)$ est bornée alors la suite $(x_ny_n)$ tend vers 0.
3. si $(x_n)$ converge vers $x$ alors la suite $(|x_n|)$ converge vers $|x|$.

4. Si $(x_n)$ converge vers $l \neq 0$ alors il existe un entier $n_0$ tel que : $\forall n > n_0$ on ait $x_n \neq 0$ et la suite $(\frac{1}{x_n})_{n>n_0}$ converge vers $\frac{1}{l}$.

**Exercice 10. Démonstration par récurrence**

1. Établir la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Soit $q$ un réel fixé. Établir la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

**Exercice 11. Suite de Cauchy 1**
Montrer que la suite $\Big((-1)^n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy.

**Exercice 12. Suite de Cauchy 2**
On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$ $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas de Cauchy.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 13. Suite de Cauchy 3**

1. Soit $0 < a < 1$ un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq a^n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle de Cauchy si elle vérifie $|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{1}{n}$ ?

**Exercice 14. Suites extraites**
Montrer que si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $l$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$. La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 15. Bolzano-Weierstrass.**

1. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
2. Montrer en construisant des exemples appropriés que toutes les hypothèses du théorèmes sont essentielles.

**Exercice 16. Valeurs d'adhérences**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Les limites finies possibles des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelées les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons $A$ cet ensemble.

1. Expliquer pourquoi si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ alors $A = \{l\}$.
2. Si $u_n = (-1)^n$ que vaut $A$ ?
3. Si $u_n = n$ que vaut $A$ ?
4. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $A$ est non vide.
5. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Construire une suite qui a exactement $p$ valeurs d'adhérences.
6. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A$ contienne au moins tous les entiers naturels.
   *Ind.* On pourra commencer par 0,0,1,0,1,2,0,1,2,3....
7. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A$ contienne au moins tous les entiers relatifs.
8. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A$ contienne au moins tous les nombres rationnels.
9. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $A$. On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite finie $l$. Montrer que $l \in A$.
10. En déduire l'existence d'une suite dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\mathbb{R}$.