L2 Mathématiques

Suites et Séries

Université de Brest

Feuille 2
Séries numériques à termes positifs

Questions de cours.
Énoncer les critères suivants pour une série à termes positifs :

a) critère de majoration b) critère de domination c) critère d'équivalence
d) critère de Riemann e) règle de d'Alembert f) règle de Cauchy

Exercice 1. Équivalent
Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right), v_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n^3-4}, w_n = \sin^3\frac{1}{n}, x_n = \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}, z_n = \frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}.$$

Exercice 2. Développement limité

1. Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \sin\left(1-\cos\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right)\right), v_n = n\left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), w_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}} - \frac{n}{\sqrt{n+1}}.$$

2. Étudier la nature des séries de terme général :

(a) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}} - e^{\frac{2}{3n}}$.

(b) $v_n = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \sqrt{\tan\frac{1}{n}}$

(c) $w_n = argsh\Big(\ln(1+\frac{1}{n})\Big)$

Exercice 3. Série à paramètre
Étudier, en fonction de la valeur $x \in \mathbb{R}$, la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^x}, \quad v_n = x^n, \quad w_n = \frac{\sin^2(nx)}{1+n^2x^2}, \quad z_n = \frac{e^{-nx}}{\ln(1+n)}.$$

Exercice 4. D'Alembert et Cauchy
Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}, v_n = \frac{n^3}{n!}, w_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{(2n)^n}, x_n = \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n}$$

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, v_n = \frac{(3n-2)!\,4^{2n}\,5^{3n}}{(2n-1)!\,n!\,7^{4n}}, w_n = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n, x_n = \frac{1}{n!}.$$

Exercice 5. Divers
Étudier la nature des séries de terme général :

$(a)\quad u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}+3}$ $\qquad (d)\quad u_n = \dfrac{3^n - 7^n}{5^n}$

$(b)\quad u_n = \dfrac{\frac{n^2}{100}+n+2}{1+3n+n^2}$ $\qquad (e)\quad u_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n+2}$

$(c)\quad u_n = \dfrac{3^n+4^n}{5^n}$ $\qquad (g)\quad u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$(e)\quad u_n = \dfrac{1}{n\cos^2 n}$ $\qquad (f)\quad u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Exercice 6. Séries télescopiques

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   (a) Calculer les sommes partielles.
   (b) En déduire que la série converge et déterminer sa limite.
2. Même question avec $v_n = \dfrac{2}{(2n+3)(2n+5)}$ et $w_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Exercice 7. Série de Bertrand
On considère les séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}, n \geq 2$.

1. Si $\alpha < 1$ que peut-on dire de la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$?
2. Si $\alpha > 1$ que peut-on dire de la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$?
3. On suppose ici que $\alpha = 1$.
   (a) Si $\beta \leq 0$, que peut-on dire de la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$?
   (b) On suppose ici que $\beta \geq 0$. Montrer que
   $$\int_n^{n+1} \frac{1}{t\ln^\beta t} dt \leq u_n \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t\ln^\beta t} dt.$$
   (c) Conclure.