L2 Mathématiques

Suites et Séries

Université de Brest

Feuille 3
Séries numériques

Questions de cours.

1. Qu'est-ce qu'une série absolument convergente.
2. Énoncer la règle de Leibniz.
3. Énoncer la règle d'Abel.
4. Qu'est-ce que le produit de Cauchy de deux séries numériques ?
5. Quand est-ce qu'un produit de Cauchy converge ?

Exercice 1. Série alternée (1)

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}.$$

Exercice 2. Équivalence et série alternée (2)

On considère les suites définies par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} u_n$ converge.
2. Montrer que $u_n \sim v_n$.
3. Que peut-on dire de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} v_n$.

Exercice 3. Série alternée (3)

1. Montrer que $\left|\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+n}\right| \sim \dfrac{1}{n}$, quand $n \longrightarrow +\infty$.
2. Que peut-on en déduire de la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$?
3. Montrer que $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+n} \sim \dfrac{(-1)^n}{n}$, quand $n \longrightarrow +\infty$.
4. Que peut-on en déduire sur la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$?
5. Montrer que $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+n} = \dfrac{(-1)^n}{n} + v_n$ avec $v_n \sim -\dfrac{1}{n^2}$.
6. Que peut-on en déduire sur la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$?

Exercice 4. Série alternée (4)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive décroissante vers zéro. Montrer les inégalités suivantes :

$$u_0 - u_1 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \leq u_0.$$

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \leq u_0 - u_1 + u_2.$$

Exercice 5. Série-Intégrale

1. Soit $a > 0$. Montrer que la série de terme générale $u_n = \dfrac{a}{n^2+a^2}$ converge.
2. À l'aide du théorème des gendarmes et d'une comparaison série-intégrale, montrer que :

$$\lim_{a \longrightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6. Produit de Cauchy (1)
On considère les suites $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} v_n$ converge mais pas le produit de Cauchy des deux séries.

Exercice 7. Produit de Cauchy (2)
On admet que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ avec $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2 3^{n-k}}$.

Exercice 8. Transformation d'Abel
On considère des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$, on a :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = s_q v_q - s_{p-1} v_p + \sum_{k=p}^{q-1} s_k (v_k - v_{k+1}).$$

2. Montrer que si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$ est convergente.

3. Montrer que ma série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$ converge pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$ converge.

   Indication. On pourra un développement limité et utiliser que $\sin^3 n = \frac{3}{4}\sin n - \frac{1}{4}\sin 3n$.

Exercice 9. Étudier la convergence absolue de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} u_n$ et sa semi-convergence.

$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ $\quad u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$ $\quad u_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$

$u_n = \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ $\quad u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ $\quad u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+5)}$

$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{4n^2-1}}$ $\quad u_n = \frac{1-\cos n}{n^2}$ $\quad u_n = \frac{\sin n}{9n^2+3n-2}$

$u_n = (-1)^n \ln(\frac{n^2-1}{n})$ $\quad u_n = (-1)^n \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$ $\quad u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

$u_n = \sin(n^2)(\frac{2^n-1}{3^n+1})$ $\quad u_n = \frac{3+\cos(n^{5000})}{e^n-1}$ $\quad u_n = (-1)^n(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$

$u_n = \frac{2^n+n^5}{n!+n^6}$ $\quad u_n = \frac{n^3 \sin n}{2^n+n^{10}}$ $\quad u_n = \frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt{n^\alpha+1}}$.

Exercice 10. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} u_n$ et calculer, si possible, sa somme :

$$
\begin{array}{lll}
u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n} & u_n = 2^n e^{-n} & u_n = (-1)^n \dfrac{(\ln 2)^n}{2^n} \\
u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1} & u_n = \dfrac{(-10)^n}{n^3} & u_n = \dfrac{(-10)^n}{n!} \\
u_n = \dfrac{3^n}{2^n+3} & u_n = \dfrac{n \sin n}{e^{\sqrt{n}}} & u_n = \dfrac{x^n}{4^n},\ x \in \mathbb{R} \\
u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) & u_n = (1 + \dfrac{(-1)^n}{n})^{n^2} & u_n = \dfrac{\ln^2 n}{\sqrt{n^3}}
\end{array}
$$

Exercice 11. Etudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} u_n$:

$$
\begin{array}{lll}
u_n = \dfrac{\cos n}{2^n} & u_n = \dfrac{1-\cos n}{\sqrt{n}} & u_n = \dfrac{n! \cos(\sqrt{n})}{n^n} \\
u_n = \dfrac{\cos n}{\ln(n+1)} & u_n = \dfrac{(\sin n) \ln^2 n}{n} & u_n = \sin(\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}) \\
u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n} & u_n = n(1 - \cos(\dfrac{1}{\sqrt{n}})) & u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \\
u_n = \sin\Big(1 - \cos\big(\ln(1 + \dfrac{1}{n^3})\big)\Big) & u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n}} - \dfrac{n}{\sqrt{n+1}} & u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}.
\end{array}
$$