L2 Mathématiques

Suites et Séries

Université de Brest

Feuille 4
Suites de fonctions

Questions de cours.

1. Donner la définition d'une suite de fonctions qui converge simplement.
2. Donner la définition d'une suite de fonctions qui converge uniformément.
3. Énoncer le théorème de continuité.
4. Énoncer le théorème de dérivabilité.
5. Énoncer le théorème d'intégration.

Exercice 1. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = 1+\dfrac{x}{n}$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur tout intervalle $[-A, A]$?

Exercice 2. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}.$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$.
2. Même question avec $g_n(x) = \dfrac{n}{1 + nx}$.

Exercice 3. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1 + nx^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
3. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie sur $[0, \pi]$ par

$$f_n(x) = \cos(x + \frac{1}{n}) + \frac{\sin n^2 x}{1 + n^2 x}.$$

1. Étudier la convergence simple sur $[0, \pi]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
2. Calculer $f_n(\frac{1}{n^2})$. Que peut-on en déduire de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sur $[0, \pi]$.

Exercice 5. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = e^{-nx} \sin x.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $|f_n(x)| \leq xe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6. Convergence simple vers une fonction discontinue
Étudier la convergence, éventuellement uniforme, des suites de fonctions définies par :

1. $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$.
2. $g_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ sur $[0, 1]$.
3. $h_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Convergence uniforme et dérivation

1. Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ et constater que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
2. Soit $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$. Montrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction qui n'est pas $\mathcal{C}^1$.

Exercice 8. Convergence simple et intégration
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on définit la fonction f_n par :

$$\begin{cases} f_n(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ f_n(x) = n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ f_n(x) = n - n^2(x - \frac{1}{n}) & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ f_n(x) = 0 & \text{si } x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de la fonction f_n.
2. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f_n(x)\, dx$. On déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$. Retrouver ce résultat en calculant $f_n(\dfrac{1}{n})$.

Exercice 9. Convergence uniforme sur un ouvert
On pose $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
3. Soit $a > 0$. Y a-t-il convergence uniforme sur $]a, +\infty[$?

Exercice 10. Vrai/Faux
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.
2. Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi.
3. Si les f_n sont périodiques, alors f aussi.
4. Si les f_n sont continues en a, alors f aussi.

Exercice 11. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0, 1]$.
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ pour $a \in]0, 1[$.

Exercice 12. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

1. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. $f_n(x) = e^{\frac{(n-1)x}{n}}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $]-\infty, b]$, avec $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 13. Convergence dominée 1
On souhaite étudier la limite $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(t) = \sin^n(t)$ converge-t-elle simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?
2. Converge-t-elle uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?
3. À l'aide du théorème de convergence dominée, calculer la limite demandée.
4. Vérifier que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\lim_{x\longrightarrow\frac{\pi}{2}} f_n(x) \neq \lim_{x\longrightarrow\frac{\pi}{2}}\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x).$$

5. Que peut-on en déduire sur la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
   Indication. Utiliser le théorème de la double limite.

Exercice 14. Convergence dominée 2

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(t) = e^{-(t^n)}$.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}^+$?
2. Converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?
3. Vérifier que $-t^n \leq \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1] \\ -t & \text{si } t > 1 \end{cases}$
4. En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(t^n)} dt = 1.$$