L2 Mathématiques Université de Brest

Suites et Séries

Feuille 5
Série de fonctions

Questions de cours.

1. Donner la définition d'une série de fonctions qui converge simplement.
2. Donner la définition d'une série de fonctions qui converge uniformément.
3. Donner la définition d'une série de fonctions qui converge normalement.
4. Énoncer le théorème de continuité.
5. Énoncer le théorème de dérivabilité.
6. Énoncer le théorème d'intégration.
7. Énoncer le théorème de convergence dominée.

Exercice 1. Déterminer le domaine de convergence des séries de fonctions suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} 3^n x^n \qquad \sum_{n\geq 1} n^2 e^{-nx} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+x^{2n}} \qquad \sum_{n\geq 0} x^n(1-x)^n$$

Exercice 2. Démontrer que les séries suivantes convergent uniformément sur le domaine D :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2} \quad D=\mathbb{R} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{n+1} \quad D=[-1,1]$$

$$\sum_{n\geq 0} x^n(1-x)^n \quad D=[0,1] \qquad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2+\arctan(nx)} \quad D=R$$

Exercice 3. On considère la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$.

1. Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. Plus généralement, montrer que la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynôme qui converge, est nécessairement un polynôme.

Exercice 4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = ne^{-nx}.$$

1. Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

   On notera S sa somme.
2. Même question sur $[a,+\infty[$, où $a>0$.

3. Pourquoi a-t-on : $\displaystyle\int_a^{+\infty} S(t)\ dt = \frac{e^{-a}}{1-e^{-a}}$, pour tout $a > 0$?
4. En déduire la valeur de $S(x)$, pour $x \in \mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 5. Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n^3x^2}}.$$

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$, pour tout $a > 0$.
3. En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}^\star$.
4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^\star$.
5. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
6. En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(t) = \dfrac{\arctan(nt)}{n^2}$.

1. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(t)$ est convergente. On note $S(t)$ sa somme.
2. Démontrer que S est un fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire.
3. Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.
4. Montrer que S admet une tangente verticale à l'origine.

Exercice 7. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.
2. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[-1,1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par :

$$g_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}.$$

Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

Exercice 8. On considère la fonction f définie par la série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) \sin(nx)\,.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition.