L2 Mathématiques
Suites et Séries

Université de Brest

Feuille 6
Série entière

Questions de cours.

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.
2. Donner les formules de Cauchy et de d'Alembert pour calculer le rayon de convergence d'une série entière.
3. Énoncer le théorème de dérivation terme à terme.
4. Énoncer le théorème de d'intégration terme à terme.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière.

Exercice 1. Écrire le développement en série entière et le rayon de convergence des fonctions :

$$\frac{1}{1-x},\ \frac{1}{1+x}, \ln(1-x),\ \ln(1+x), e^x, ch(x), sh(x), \sin(x), \cos(x).$$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes :

$$S_1(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{5^n}; \quad S_2(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{3^n(n+1)}; \quad S_3(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{x^n}{n!n^2};$$

$$S_4(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n5^n x^n; \quad S_5(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n!x^n; \quad S_6(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \ln(n)x^n.$$

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum_{n\geq 0} (\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n})z^n; \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n; \quad \sum_{n\geq 0} e^{-n^2} z^n; \quad \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^n; \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n.$$

Exercice 4. Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum \ln(\frac{n+1}{n})x^n \text{ et } \sum \sin(e^{-n})x^n.$$

Exercice 5. Donner le rayon de convergence et l'ensemble de convergence des séries entières :

$$\sum_{n\geq 0} x^{3n};\quad \sum_{n\geq 0} 4^n x^{2n};\quad \sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!} x^{3n+1};\quad \sum_{n\geq 0} n^2 (x-1)^n;\quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}(x+1)^{3n};$$

$$\sum_{n\geq 0} z^{n^2};\quad \sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n;\quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n;\quad \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n};\quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}.$$

Exercice 6.

1. Calculer le rayon de convergence R de la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{n^2-2n}$.
2. Représenter graphiquement $I = \{x \in \mathbb{R} / S(x) \text{ converge}\}$.
3. Déterminer deux réels a et b tel que $\dfrac{1}{n^2-2n} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n-2}$.
4. En déduire une expression de $S(x)$.

Exercice 7.

1. Calculer le rayon de convergence R de la série entière suivante $u(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{x^n}{n(n+1)}$.
2. Étudier la convergence en $x = \pm R$.
3. Déterminer deux réels a et b tel que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.
4. En déduire une expression de $u(x)$ au moyen de fonctions usuelles lorsque $x \neq 0$.

Exercice 8.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
2. En déduire la valeur de $f^{(4)}(0)$.
3. Comparer la dérivée de f avec la fonction $g(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
4. En déduire le développement en série entière de la fonction g.
5. En déduire la valeur de $g^{(3)}(0)$.
6. Déterminer le développement en série entière de la fonction $h(x) = \ln\left(\dfrac{1+2x^2}{1-x^2}\right)$.

Exercice 9.

1. Développer en série entière la fonction $f(x) = -\ln(1+4x)$
2. Même question avec $g(x) = \ln(\dfrac{2+x}{1-x})$.
3. On cherche à développer en série entière la fonction $h(x) = \dfrac{1}{6x^2-5x+1}$.
4. On cherche à développer en série entière la fonction $i(x) = \ln(x^2+2x+4)$. Pour cela développer d'abord $j(x) = i(2x)$.

Exercice 10.

1. Calculer le rayon de convergence R de la série entière suivante $u(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{2n+1}$.
2. Étudier la convergence en $x = \pm R$.
3. Exprimer $v(x) = xu(x^2)$ comme une série de fonction pour $x \in]-R, R[$.
4. Calculer v'.
5. En déduire une expression de $u(x)$ pour $x > 0$ au moyen de fonctions usuelles.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = n(-2)^n$ et $b_n = (-2)^n$.

1. Montrer que les séries entières de termes général $a_n x^n$ et $b_n x^n$ ont même rayon de convergence R.
2. Donner une expression simple de $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$.
3. Pour tout $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Écrire sous forme de série entière la primitive de (f+g) nulle en 0, notée h.
4. Montrer que $h(x) = xg(x)$ pour $x \in]-R, R[$.
5. En déduire une expression de f sous forme de fraction rationnelle.
6. Calculer $f(0), f'(0), f^{(5)}(0)$.

Exercice 12. Déterminer une série entière solution de

$$\begin{cases} xy''(x) - y(x) = x^2 + x + 1 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Même question avec le système :

$$\begin{cases} xy''(x) + xy(x) = x^2 + x + 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Fonction développable en série entière

Rappel (Taylor-Lagrange). Soit I un intervalle contenant 0 et f une fonction infiniment dérivable sur I. Alors $f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$ avec $\theta \in]0,1[$. La fonction f est développable en série entière sur I ssi :

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = 0.$$

Dans ce cas $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0), \quad \forall x \in I.$

Exercice-Théorème.

1. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.
2. En déduire que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
3. Soit f une fonction infiniment dérivable sur I. On suppose qu'il existe une constante M telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$. Montrer que f est développable en série entière sur I.

Exercice-Application. On définit $f(x) = \sum_{n \geq 0} \sin \frac{x}{2^n}$.

1. Soit $A > 0$, montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \sin \frac{x}{2^n}$ converge normalement sur $[-A, A]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $[-A, A]$ et écrire f' sous forme d'une série de fonctions.
3. Déterminer une majoration de $|f'(x)|$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer de même une majoration de $|f^{(k)}(x)|$ sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
6. On écrit $f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$. Expliciter b_{2p} et b_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice-Application. Montrer que $f(x) = (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$.