L2 Mathématiques

Suites et Séries

Université de Brest

Feuille 7
Série Fourier

Rappel. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique on note :

$$\begin{aligned} S(x) &= \tfrac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big) \\ &= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \end{aligned}$$

la série de Fourier de f avec :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx \quad \forall n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx \quad \forall n \geq 1$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 1. Déterminer la série de Fourier de la fonction $\cos(x)$. On rappelle que :

$$\begin{cases} \cos(x)\cos(nx) = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(n+1)x + \cos(n-1)x\Big) & \forall n \in \mathbb{N} \\ \cos(x)\sin(nx) = \dfrac{1}{2}\Big(\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\Big) & \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \int_t^{t+2\pi} f(x)\, dx$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. On suppose que f est paire. Montrer que :
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\, dx.$$
3. On suppose maintenant que f est impaire. Montrer que :
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0.$$

4. On note $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients dans la série de Fourier de f. Montrer que :
$$\left\{ \begin{array}{l} a_n(f') = nb_n(f) \\ b_n(f') = -na_n(f) \end{array} \right.$$
5. Montrer que si $f(x+\pi) = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $a_{2n} = b_{2n} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que si $f(\pi - x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $a_{2n-1} = b_{2n} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 3. Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \pi - x$ sur $]-\pi, \pi]$.

1. On veut développer f en série de Fourier.
   (a) Tracer le graphe de la fonction f.
   (b) Vérifier que la série de Fourier de f est :
   $$S(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx)$$
   (c) Déterminer la somme de la série de Fourier de f.
   (d) En déduire que
   $$-\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n)$$
   (e) Puis que
   $$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$
   (f) Appliquer l'égalité de Parseval.
2. On veut maintenant développer f en série de cosinus sur $[0, \pi]$.
   (a) Prolonger f par parité et dessiner son graphe.
   (b) Calculer sa série de Fourier.
   (c) Appliquer le théorème de Dirichlet.
3. Enfin, on veut développer f en série de sinus sur $]0, \pi[$.
   (a) Prolonger f par imparité et dessiner son graphe.
   (b) Calculer sa série de Fourier.
   (c) Appliquer le théorème de Dirichlet.

Exercice 4. Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \in]-\pi, 0] \\ x & \text{si } x \in [0, \pi] \end{array} \right.$

1. Tracer le graphe de la fonction f.
2. Vérifier que la série de Fourier de f est :
$$S(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

3. Déterminer la somme de la série de Fourier de f.
4. En déduire que :

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Exercice 5. On définit les fonctions 2π périodiques suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \in]-\pi,\pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases} ; g(x) = |x| \text{ si x } \in]-\pi,\pi]; h(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & \text{si } x \in [0,\pi] \\ f \text{ impaire} & \end{cases}$$

On admet que leur développement en série de Fourier est donné par :

$$\mathcal{F}f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx; \quad \mathcal{F}g(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos(2k+1)x$$

$$\mathcal{F}h(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}.$$

Appliquer dans chaque cas le théorème de Dirichlet et celui de Parseval.

Exercice 6. On considère la série $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence de la série.
2. Que dire de la continuité de la fonction f.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer les coefficients Fourier de f.

Exercice 7.

1. Pour $r \in]-1,1[$ calculer la somme de la série de terme général $u_n(r) = r^n e^{int}$, où $t \in \mathbb{R}$.
2. En considérant la partie réelle en déduire que :

$$\frac{1 - r\cos t}{1 + r^2 - 2r\cos(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(nt).$$

3. Que peut-on dire de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(nt)$.
4. En utilisant la théorie de Fourier et le théorème d'intégration terme à terme, en déduire pour $n \geq 1$ la valeur de :

$$I_m(r) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - r\cos t}{1 - r^2 - 2r\cos(t)} \cos(mt)dt.$$

Exercice 8. Soit a un réel fixé et $a > 0$. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-2n\pi)^2 + a^2}$$

1. Vérifier que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x-2n\pi)^2 + a^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+2n\pi)^2 + a^2}$.
2. Montrer que f est 2π périodique et somme de sa série de Fourier qu'on déterminera.
   Ind. On admettra que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-int}}{t^2+a^2}dt = \frac{e^{-|n|a}}{2a}$.
3. En déduire que $f(x) = \dfrac{sh(a)}{2a(ch(a) - \cos x)}$.